MATURALNE



Rozwiązania krok po kroku

Statystyka opisowa

poziom **podstawowy**

Statystyka opisowa – zadania maturalne (poziom podstawowy): rozwiązania

Spis treści

1 Średnia arytmetyczna: średnia to równanie **2**
1.1 Zadanie 1 (matura maj 2022) (0-1) . . . 2
1.2 Zadanie 2 (matura sierpień 2021 – poprawkowa) (0-1) . . . 3
1.3 Zadanie 3 (matura maj 2025) (0-1) . . . 4
1.4 Zadanie 4 (matura sierpień 2016 – poprawkowa) (0-1) . . . 5
1.5 Zadanie 5 . . . 7
1.6 Zadanie 6 . . . 9

2 Średnia nowego zestawu liczb **11**
2.1 Zadanie 7 (matura sierpień 2022 – poprawkowa) (0-1) . . . 11
2.2 Zadanie 8 (matura czerwiec 2023 – stara formuła) (0-1) . . . 12
2.3 Zadanie 9 (matura czerwiec 2025) (0-1) . . . 13
2.4 Zadanie 10 (matura czerwiec 2026) (0-1) . . . 14
2.5 Zadanie 11 (matura maj 2026) (0-1) . . . 15
2.6 Zadanie 12 . . . 16
2.7 Zadanie 13 . . . 18

3 Średnia ważona: z tabeli, z diagramu, z wagami **20**
3.1 Zadanie 14 (matura czerwiec 2018) (0-1) . . . 20
3.2 Zadanie 15 (matura wrzesień 2020 – poprawkowa) (0-1) . . . 21
3.3 Zadanie 16 (matura czerwiec 2024) (0-1) . . . 22
3.4 Zadanie 17 (matura sierpień 2023 – poprawkowa) (0-1) . . . 24
3.5 Zadanie 18 (matura maj 2016) (0-2) . . . 26
3.6 Zadanie 19 . . . 28
3.7 Zadanie 20 . . . 30
3.8 Zadanie 21 . . . 32
3.9 Zadanie 22 . . . 33
3.10 Zadanie 23 . . . 35

4 Mediana **37**
4.1 Zadanie 24 (matura czerwiec 2020) (0-1) . . . 37
4.2 Zadanie 25 (matura maj 2019) (0-1) . . . 38
4.3 Zadanie 26 (matura sierpień 2018 – poprawkowa) (0-1) . . . 39
4.4 Zadanie 27 (matura sierpień 2019 – poprawkowa) (0-1) . . . 40
4.5 Zadanie 28 (matura maj 2024) (0-1) . . . 42
4.6 Zadanie 29 . . . 45
4.7 Zadanie 30 . . . 47
4.8 Zadanie 31 . . . 48
4.9 Zadanie 32 . . . 50

5 Dominanta i całe zadanie z diagramu albo tabeli **51**
5.1 Zadanie 33 (matura maj 2026) (0-1) . . . 51
5.2 Zadanie 34 (matura maj 2023) (0-2) . . . 54
5.3 Zadanie 35 (matura maj 2025) (0-2) . . . 57
5.4 Zadanie 36 (matura sierpień 2026 – poprawkowa – stara formuła) (0-2) . . . 59
5.5 Zadanie 37 (matura czerwiec 2025) (0-3) . . . 61
5.6 Zadanie 38 (matura sierpień 2025 – poprawkowa) (0-3) . . . 63
5.7 Zadanie 39 . . . 66
5.8 Zadanie 40 . . . 68
5.9 Zadanie 41 . . . 70

Zadanie 1 (matura maj 2022) (0-1)

Średnia arytmetyczna zestawu sześciu liczb: $2x,\ 4,\ 6,\ 8,\ 11,\ 13$, jest równa 5. Wynika stąd, że
A. $x = -1$
B. $x = 7$
C. $x = -6$
D. $x = 6$

ZAMYSŁ

Średnią sześciu liczb zapisujemy wzorem i przyrównujemy do 5, więc dostajemy równanie z jedną niewiadomą x. Rozwiązujemy je do końca i z liczby x odczytujemy literę odpowiedzi.

1 Zapisujesz wzór na średnią, wstawiasz sześć liczb i przyrównujesz całość do 5.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{2x + 4 + 6 + 8 + 11 + 13}{6} = 5$$

2 Dodajesz liczby w liczniku i mnożysz obie strony przez 6, usuwając ułamek.

$$\frac{2x + 42}{6} = 5 \quad / \cdot 6$$
$$2x + 42 = 30$$

3 Odejmujesz 42 od obu stron, potem dzielisz obie strony przez 2.

$$2x + 42 = 30 \quad / -42$$
$$2x = -12 \quad / : 2$$
$$x = -6$$

WYNIK $x = -6$, odp. C

Zadanie 2 (matura sierpień 2021 – poprawkowa) (0–1)

Średnia arytmetyczna pięciu liczb: $5x + 6,\ 6x + 7,\ 7x + 8,\ 8x + 9,\ 9x + 10$, jest równa 8. Wtedy x jest równe
A. (-35)
B. 0
C. 0,35
D. 35

ZAMYSŁ

Średnią pięciu liczb zapisujemy wzorem i przyrównujemy do 8, więc dostajemy równanie z jedną niewiadomą x. Pozbywamy się mianownika, porządkujemy lewą stronę i wyznaczamy x. Na końcu odczytujemy literę odpowiedzi.

1 Wstawiasz pięć liczb do wzoru na średnią i przyrównujesz ją do 8.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{(5x + 6) + (6x + 7) + (7x + 8) + (8x + 9) + (9x + 10)}{5} = 8$$

2 Mnożysz obie strony przez 5, potem dodajesz osobno wyrazy z x i liczby.

$$\frac{(5x + 6) + (6x + 7) + (7x + 8) + (8x + 9) + (9x + 10)}{5} = 8 \quad / \cdot 5$$

$$(5x + 6) + (6x + 7) + (7x + 8) + (8x + 9) + (9x + 10) = 40$$

$$(5x + 6x + 7x + 8x + 9x) + (6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 40$$

$$35x + 40 = 40$$

3 Odejmujesz 40 od obu stron, dzielisz przez 35 i odczytujesz literę odpowiedzi.

$$35x + 40 = 40 \quad / - 40$$

$$35x = 0 \quad / : 35$$

$$x = 0$$

WYNIK $x = 0$, odp. B

Zadanie 3 (matura maj 2025) (0–1)

Średnia arytmetyczna siedmiu liczb: $1, 2, 3, 4, 5, x, y$, jest równa 3.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Suma $x + y$ jest równa
A. 4
B. 5
C. 6
D. 7

ZAMYSŁ

Średnią siedmiu liczb zapisujemy wzorem i przyrównujemy do 3. Dostajemy równanie, w którym x i y występują tylko jako suma $x + y$, więc nie szukamy ich osobno, tylko wyznaczamy od razu całą sumę. Na końcu odczytujemy literę odpowiedzi.

1 Wstawiasz wszystkie siedem liczb do wzoru na średnią i przyrównujesz do 3.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x + y}{7} = 3$$

2 Dodajesz pięć znanych liczb w liczniku, x i y zostawiasz jako sumę.

$$\frac{15 + x + y}{7} = 3$$

3 Mnożysz obie strony przez 7, potem odejmujesz 15 i masz sumę $x + y$.

$$\frac{15 + x + y}{7} = 3 \quad / \cdot 7$$
$$15 + x + y = 21 \quad / - 15$$
$$x + y = 6$$

WYNIK $x + y = 6$, odp. C

Zadanie 4 (matura sierpień 2016 – poprawkowa) (0-1)

Jeżeli do zestawu czterech danych: $4, 7, 8, x$ dołączymy liczbę 2, to średnia arytmetyczna wzrośnie o 2. Zatem
A. $x = -51$
B. $x = -6$
C. $x = 10$
D. $x = 29$

ZAMYSŁ

Zapisujemy obie średnie jako ułamki z x, a zdanie o wzroście średniej o 2 zamieniamy na równanie. Z równania wychodzi x i wybieramy literę.

ZARYS

A dwie średnie
→ średnie zapisane przez x

B równanie ze wzrostu o 2
→ równanie bez ułamków

C rozwiązanie równania
→ wynik

A **dwie średnie** → średnie zapisane przez x

1 Liczysz średnią czterech danych: ich sumę dzielisz przez 4.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\bar{a}_4 = \frac{4 + 7 + 8 + x}{4}$$

$$\bar{a}_4 = \frac{19 + x}{4}$$

2 Po dołączeniu liczby 2 masz pięć danych, więc sumę dzielisz przez 5.

$$\bar{a}_5 = \frac{4 + 7 + 8 + x + 2}{5}$$

$$\bar{a}_5 = \frac{21 + x}{5}$$

B **równanie ze wzrostu o 2** → równanie bez ułamków

3 Wzrost o 2 zapisujesz jako różnicę: nowa średnia minus stara.

$$\frac{21+x}{5}-\frac{19+x}{4}=2$$

4 Mnożysz obie strony przez 20, żeby pozbyć się mianowników, i wymnażasz nawiasy.

$$\frac{21+x}{5}-\frac{19+x}{4}=2 \quad / \cdot 20$$

$$\frac{\cancel{20}^{4}(21+x)}{\cancel{5}}-\frac{\cancel{20}^{5}(19+x)}{\cancel{4}}=40$$

$$4(21+x)-5(19+x)=40$$

$$84+4x-95-5x=40$$

C **rozwiązanie równania** → wynik

5 Redukujesz wyrazy podobne, potem dodajesz 11 do obu stron.

$$-11-x=40 \quad / +11$$

$$-x=51$$

6 Mnożysz obie strony przez -1 i odczytujesz literę odpowiedzi.

$$-x=51 \quad / \cdot(-1)$$

$$x=-51$$

WYNIK	$x=-51$, odp. A

Zadanie 5

W zespole tanecznym występuje trzech chłopców i dwie dziewczyny, które są rówieśniczkami. Średnia wieku całej piątki jest równa 16,2 roku, a średnia wieku chłopców to 15 lat. Ile lat ma każda z dziewcząt?

A. 18
B. 36
C. 17
D. 21

ZAMYSŁ

Średnią chłopców i średnią całej piątki zapisujemy jako dwa równania. Z pierwszego mamy sumę wieku chłopców, więc w drugim zostaje tylko wiek dziewczyny.

ZARYS

A	B	C
średnia wieku chłopców	średnia wieku całej piątki	rozwiązanie równania z B
→ suma wieku chłopców	→ równanie z x	→ wynik

A ○ ○ średnia wieku chłopców

→ suma wieku chłopców

1 Zapisujesz wzór na średnią i podstawiasz do niego wiek trzech chłopców.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} = 15 \qquad / \cdot 3$$

2 Mnożysz obie strony przez 3 i dostajesz sumę wieku chłopców.

$$c_1 + c_2 + c_3 = 45$$

● B ○ średnia wieku całej piątki

→ równanie z x

3 Słowo „rówieśniczkami” mówi, że obie dziewczyny mają po x lat; piszesz średnią piątki.

$$d_1 = d_2 = x$$

$$\frac{c_1 + c_2 + c_3 + x + x}{5} = 16{,}2$$

4 W miejsce sumy wieku chłopców wstawiasz 45 z etapu A i dodajesz x do x.

$$\frac{45 + x + x}{5} = 16{,}2$$

$$\frac{45 + 2x}{5} = 16{,}2 \qquad / \cdot 5$$

C **rozwiązanie równania z B** → wynik

5 Mnożysz obie strony przez 5, potem odejmujesz 45 od obu stron.

$$\begin{aligned} 45 + 2x &= 81 \quad / -45 \\ 2x &= 36 \quad / : 2 \end{aligned}$$

6 Dzielisz obie strony przez 2: każda dziewczyna ma 18 lat, czyli odpowiedź A.

$$x = 18$$

WYNIK $x = 18$ lat, odp. A

Zadanie 6

Średnia masa skrzynek z jabłkami stojących na wózku jest równa 18 kg. Po dostawieniu skrzynki o masie 30 kg średnia masa skrzynki na wózku wzrosła do 19 kg. Oblicz, ile skrzynek stało na wózku na początku.

ZAMYSŁ

Ze wzoru na średnią zapisujemy sumę mas skrzynek przez ich liczbę n, a potem tak samo średnią po dostawieniu skrzynki. Wychodzi równanie z jedną niewiadomą n, które rozwiązujemy do liczby.

ZARYS

A równanie średniej przed i po dostawieniu → równanie z n

B rozwiązanie równania z A → wynik

A równanie średniej przed i po dostawieniu → równanie z n

1. Oznaczasz liczbę skrzynek przez n, sumę mas przez S i mnożysz przez n, bo $n > 0$.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{S}{n} = 18 \quad / \cdot n$$
$$S = 18n$$

2. Po dostawieniu skrzynki suma rośnie o 30, a skrzynek jest $n + 1$.

$$\frac{S + 30}{n + 1} = 19$$
$$\frac{18n + 30}{n + 1} = 19$$

B rozwiązanie równania z A → wynik

3. Mnożysz obie strony przez $n + 1$, bo to dodatnia liczba skrzynek, i wymnażasz nawias.

$$\frac{18n + 30}{n + 1} = 19 \quad / \cdot (n + 1)$$
$$18n + 30 = 19(n + 1)$$
$$18n + 30 = 19n + 19$$

4 Odejmujesz od obu stron $18n$, potem 19, i odczytujesz n.

$$\begin{aligned} 18n + 30 &= 19n + 19 \quad / -18n \\ 30 &= n + 19 \quad / -19 \\ 11 &= n \end{aligned}$$

WYNIK	$n = 11$, czyli na początku stało 11 skrzynek

Zadanie 7 (matura sierpień 2022 – poprawkowa) (0–1)

Średnia arytmetyczna zestawu liczb a, b, c, d jest równa 20. Wtedy średnia arytmetyczna zestawu liczb $a - 10,\ b + 30,\ c,\ d$ jest równa

A. 10
B. 20
C. 25
D. 30

ZAMYSŁ

Ze średniej liczb a, b, c, d odczytujemy ich sumę. W nowym zestawie zbieramy $a + b + c + d$ w jedną grupę i wstawiamy za nią tę sumę, więc zostaje sam rachunek na liczbach.

1 Zapisujesz wzorem średnią liczb a, b, c, d i mnożysz obie strony przez 4.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{a + b + c + d}{4} = 20 \qquad / \cdot 4$$

$$a + b + c + d = 80 \qquad (*)$$

2 Zapisujesz średnią nowego zestawu i porządkujesz licznik: liczby zbierasz razem, litery razem.

$$\frac{(a - 10) + (b + 30) + c + d}{4} = \frac{a + b + c + d - 10 + 30}{4}$$

$$= \frac{a + b + c + d + 20}{4}$$

3 W miejsce sumy $a + b + c + d$ wstawiasz 80 i liczysz średnią do końca.

$$\frac{a + b + c + d + 20}{4} = \frac{80 + 20}{4} \quad \text{z (*)}$$

$$= \frac{100}{4}$$

$$= 25$$

WYNIK 25, odp. C

Zadanie 8 (matura czerwiec 2023 – stara formuła) (0-1)

Średnia arytmetyczna zestawu pewnych stu liczb całkowitych dodatnich jest równa s. Każdą z liczb tego zestawu zwiększamy o 4, w wyniku czego otrzymujemy nowy zestaw stu liczb. Średnia arytmetyczna nowego zestawu stu liczb jest równa

A. $s + 4$

B. $s + \frac{4}{100}$

C. $\frac{s+4}{100}$

D. $4s$

ZAMYSŁ

Ze średniej odczytujemy sumę wszystkich stu liczb, bo to ona się zmienia, gdy każdą liczbę zwiększamy. Każda z nich rośnie o 4, więc suma rośnie o 400. Nową sumę dzielimy przez 100 i dostajemy nową średnią zapisaną przez s.

1 Średnią zapisujesz wzorem i mnożysz obie strony przez 100, żeby dostać sumę.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}}{100} = s \qquad / \cdot 100$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 100s \qquad (*)$$

2 Do każdej ze stu liczb dodajesz 4, więc w liczniku przybywa 400.

$$\bar{a}_{\text{nowa}} = \frac{(a_1 + 4) + (a_2 + 4) + \ldots + (a_{100} + 4)}{100}$$

$$\bar{a}_{\text{nowa}} = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}) + 100 \cdot 4}{100}$$

$$\bar{a}_{\text{nowa}} = \frac{100s + 400}{100} \qquad \text{z } (*)$$

3 Każdy składnik licznika dzielisz przez 100 i porównujesz z odpowiedziami.

$$\bar{a}_{\text{nowa}} = \frac{100s}{100} + \frac{400}{100}$$

$$\bar{a}_{\text{nowa}} = \frac{\cancel{100}s}{\cancel{100}} + \frac{\overset{4}{\cancel{400}}}{\underset{1}{\cancel{100}}}$$

$$\bar{a}_{\text{nowa}} = s + 4$$

WYNIK $s + 4$, odp. A

Zadanie 9 (matura czerwiec 2025, 0–1)

Średnia arytmetyczna trzech liczb: a, b, c, jest równa 12.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Średnia arytmetyczna sześciu liczb: $2a, 3a, 2b, 3b, 2c, 3c$, jest równa
A. 10
B. 12
C. 30
D. 60

ZAMYSŁ

Z danej średniej wyliczamy sumę trzech liczb. Potem w sumie sześciu liczb wyłączamy przed nawias tę samą sumę i wstawiamy jej wartość. Na końcu zostaje dzielenie przez 6.

1 Ze wzoru na średnią trzech liczb mnożysz obie strony przez 3 i dostajesz sumę.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{a+b+c}{3} = 12 \quad / \cdot 3$$
$$a+b+c = 36$$

2 W liczniku średniej sześciu liczb dodajesz wyrazy z tą samą literą i wyłączasz 5.

$$\bar{s} = \frac{2a + 3a + 2b + 3b + 2c + 3c}{6}$$
$$= \frac{5a + 5b + 5c}{6}$$
$$= \frac{5\,(a+b+c)}{6}$$

3 W miejsce nawiasu wstawiasz policzoną sumę 36 i dzielisz przez 6.

$$\bar{s} = \frac{5 \cdot 36}{6}$$
$$= \frac{180}{6}$$
$$\frac{180}{6} = 30$$

WYNIK 30, odp. C

Zadanie 10 (matura czerwiec 2026, 0–1)

W pewnej miejscowości zlokalizowane są dwie szkoły. W pierwszej z nich jest trzy razy więcej uczniów niż w drugiej. Średni wiek uczniów w pierwszej szkole to 9 lat, a średni wiek uczniów w drugiej szkole to 13 lat.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Średni wiek wszystkich uczniów obu szkół, wyrażony w latach, jest równy
A. 10
B. 10,5
C. 11
D. 11,5

ZAMYSŁ

W pierwszej szkole jest trzy razy więcej uczniów, więc jej średnią liczymy trzy razy mocniej niż średnią drugiej. Dlatego bierzemy średnią ważoną z wagami 3 i 1, a nie zwykłą średnią z 9 i 13. Na końcu zostaje jedna liczba i z niej odczytujemy literę odpowiedzi.

1 Warunek „trzy razy więcej” daje wagi 3 i 1, bo liczy się stosunek.

$$w_1 = 3w_2$$
$$w_1 = 3$$
$$w_2 = 1$$

2 Piszesz wzór na średnią ważoną i wstawiasz wagi oraz średnie wieku szkół.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2}{w_1 + w_2}$$
$$\bar{s} = \frac{3 \cdot 9 + 1 \cdot 13}{3 + 1}$$

3 Liczysz osobno licznik i mianownik, a potem dzielisz.

$$\bar{s} = \frac{27 + 13}{4}$$
$$\bar{s} = \frac{40}{4}$$
$$\bar{s} = 10$$

WYNIK $\bar{s} = 10$, odp. A

Zadanie 11 (matura maj 2026, 0–1)

Średnia arytmetyczna trzech liczb: a, b, c, jest równa 2.
Średnia arytmetyczna czterech liczb: d, e, f, g, jest równa 5,5.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Średnia arytmetyczna siedmiu liczb: a, b, c, d, e, f, g, jest równa
A. 3,5
B. 3,75
C. 4
D. 4,25

ZAMYSŁ

Średnia mówi nam, ile wynosi suma liczb, więc z każdej średniej odtwarzamy sumę jej grupy. Obie sumy dodajemy, bo to suma wszystkich siedmiu liczb, i dzielimy ją przez 7. Na końcu zostaje jedna liczba i litera odpowiedzi.

1. Zapisujesz średnią trzech liczb ze wzoru i mnożysz obie strony przez 3, żeby dostać sumę.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{a+b+c}{3} = 2 \quad / \cdot 3$$
$$a + b + c = 6$$

2. Tak samo zapisujesz średnią czterech liczb i mnożysz obie strony przez 4.

$$\frac{d+e+f+g}{4} = 5{,}5 \quad / \cdot 4$$
$$d + e + f + g = 22$$

3. Dodajesz obie sumy i dzielisz przez 7, bo tyle jest wszystkich liczb.

$$\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7} = \frac{6 + 22}{7}$$
$$\frac{28}{7} = 4$$

WYNIK 4, odp. C

Zadanie 12

Łucznik oddał jedenaście strzałów i zdobył kolejno: 4, 9, 6, 2, 9, 7, 5, 8, 3, 9, 4 punktów. Sędzia anulował jeden strzał i średnia liczba punktów za strzał zmniejszyła się o 0,3. Ile punktów dał anulowany strzał?

A. 6
B. 7
C. 8
D. 9

ZAMYSŁ

Liczymy sumę punktów przed anulowaniem i po nim. Anulowany strzał to różnica tych dwóch sum.

ZARYS

A	B	C
średnia przed anulowaniem	suma po anulowaniu	anulowany strzał
→ suma i średnia jedenastu strzałów	→ średnia i suma dziesięciu strzałów	→ wynik

A ○○ średnia przed anulowaniem

→ suma i średnia jedenastu strzałów

1 Wstawiasz wszystkie jedenaście wyników do wzoru na średnią i dodajesz licznik.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\bar{a} = \frac{4+9+6+2+9+7+5+8+3+9+4}{11}$$

$$\bar{a} = \frac{66}{11}$$

2 Skracasz ułamek i masz średnią przed anulowaniem, a suma 66 przyda się na końcu.

$$\bar{a} = 6$$

● B ○ suma po anulowaniu

→ średnia i suma dziesięciu strzałów

3 Warunek „zmniejszyła się” mówi, że nowa średnia jest o 0,3 mniejsza od 6.

$$\bar{a}_1 = 6 - 0{,}3$$

$$\bar{a}_1 = 5{,}7$$

4 Zostaje dziesięć strzałów, więc nowa suma podzielona przez 10 daje 5,7; mnożysz przez 10.

$$\frac{S_1}{10} = 5{,}7 \quad / \cdot 10$$

$$S_1 = 57$$

C anulowany strzał

→ wynik

5 Anulowany strzał to różnica sumy przed anulowaniem i sumy po nim.

$$x = 66 - 57$$
$$x = 9$$

WYNIK 9, odp. D

Zadanie 13

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: $15, 6, 10, 4, 20, 5$ zmniejszy się o 20%, gdy w miejsce 20 wpiszemy liczbę
A. 8
B. 12
C. 16
D. 18

ZAMYSŁ

Liczymy obecną średnią i zmniejszamy ją o 20%. Potem w miejsce 20 wpisujemy x i żądamy, żeby nowa średnia wyszła taka, jak policzyliśmy.

ZARYS

A średnia danego zestawu → średnia $\bar{a}$

B średnia po zmniejszeniu o 20% → nowa średnia $\bar{b}$

C liczba wpisana w miejsce 20 → wynik

A średnia danego zestawu → średnia $\bar{a}$

1 Dodajesz sześć liczb i dzielisz sumę przez ich liczbę, czyli przez 6.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\bar{a} = \frac{15 + 6 + 10 + 4 + 20 + 5}{6}$$

$$\bar{a} = \frac{60}{6}$$

$$\bar{a} = 10$$

B średnia po zmniejszeniu o 20% → nowa średnia $\bar{b}$

2 Średnia „zmniejszy się” o 20%, więc zostaje 80%, czyli 0,8 razy 10.

$$\bar{b} = 0{,}8 \cdot 10$$

$$\bar{b} = 8$$

C **liczba wpisana w miejsce 20** → wynik

3 W miejsce 20 wpisujesz x, przyrównujesz średnią do 8 i mnożysz przez 6.

$$\frac{15+6+10+4+x+5}{6}=8 \quad / \cdot 6$$
$$15+6+10+4+x+5=48$$

4 Dodajesz znane liczby, odejmujesz 40 od obu stron i odczytujesz literę odpowiedzi.

$$40+x=48 \quad / -40$$
$$x=8$$

WYNIK $x=8$, odp. A

Zadanie 14 (matura czerwiec 2018, 0–1)

Wśród 100 osób przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie o liczbę książek przeczytanych w ostatnim roku. Wyniki ankiety zebrano w poniższej tabeli.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	23	14	28	17	11	7

Średnia liczba przeczytanych książek przez jedną ankietowaną osobę jest równa
A. 0,5
B. 1
C. 2
D. 2,5

ZAMYSŁ

Każdą liczbę książek liczymy tyle razy, ile osób ją podało, więc mnożymy ją przez liczbę osób i dodajemy. Sumę dzielimy przez liczbę wszystkich ankietowanych. Na końcu zostaje jedna liczba i z niej czytamy literę.

1. Wypisujesz wzór na średnią ważoną; wagą jest liczba osób, wartością liczba książek.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{23 \cdot 0 + 14 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{23 + 14 + 28 + 17 + 11 + 7}$$

2. Liczysz każdy iloczyn w liczniku osobno, a w mianowniku sumę osób.

$$\bar{s} = \frac{0 + 14 + 56 + 51 + 44 + 35}{100}$$

3. Dodajesz licznik i dzielisz przez 100; wynik wskazuje odpowiedź C.

$$\bar{s} = \frac{200}{100}$$

$$\bar{s} = 2$$

WYNIK $\bar{s} = 2$, odp. C

Zadanie 15 (matura wrzesień 2020 – poprawkowa) (0-1)

W zestawie 250 liczb występują jedynie liczby 4 i 2. Liczba 4 występuje 128 razy, a liczba 2 występuje 122 razy. Przyjęto przybliżenie średniej arytmetycznej zestawu tych wszystkich liczb do liczby 3. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy

A. 0,024
B. 0,24
C. 0,0024
D. 0,00024

ZAMYSŁ

Najpierw liczymy dokładną średnią zestawu, w której każda liczba występuje tyle razy, ile razy jest w zestawie. Potem porównujemy ją z przybliżeniem 3, bo błąd bezwzględny to odległość między nimi.

1 Średnią liczysz ze wzoru na średnią ważoną: liczby to 4 i 2, wagi to 128 i 122.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2}{w_1 + w_2}$$

$$\bar{s} = \frac{128 \cdot 4 + 122 \cdot 2}{128 + 122}$$

2 Mnożysz w liczniku, dodajesz wagi w mianowniku i dzielisz.

$$\bar{s} = \frac{512 + 244}{250} = \frac{756}{250}$$

$$\bar{s} = 3{,}024$$

3 Błąd bezwzględny to wartość bezwzględna różnicy dokładnej średniej i przybliżenia 3.

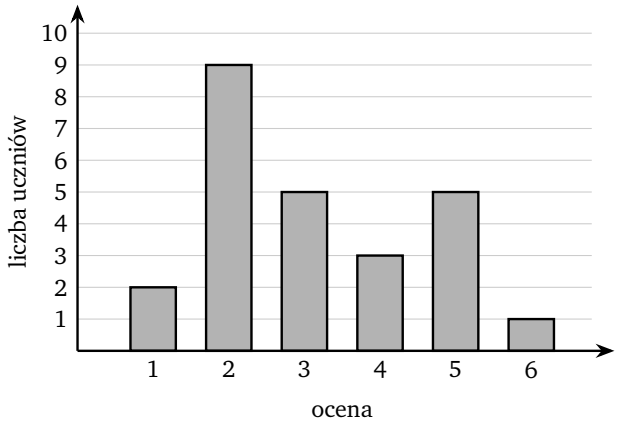
$$|3{,}024 - 3| = |0{,}024|$$

$$|3{,}024 - 3| = 0{,}024$$

WYNIK 0,024, odp. A

Zadanie 16 (matura czerwiec 2024) (0–1)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa
A. 3
B. 3,12
C. 3,5
D. 4,1(6)

ZAMYSŁ

Każda ocena liczy się tyle razy, ilu uczniów ją dostało, więc liczba uczniów jest wagą oceny. Dlatego najpierw przepisujemy diagram do tabelki, a potem liczymy średnią ważoną i dzielimy przez liczbę wszystkich uczniów.

ZARYS

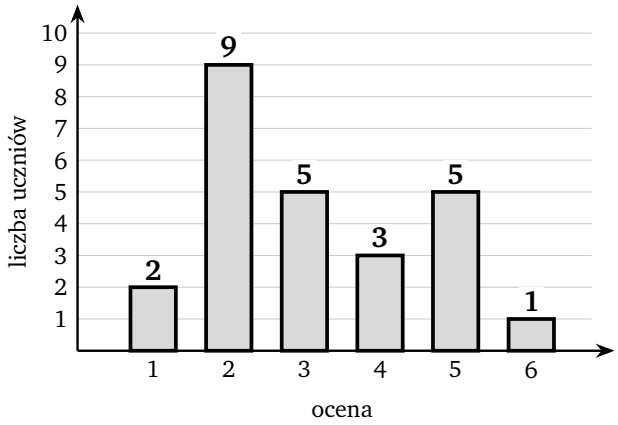
A tabelka z diagramu
→ oceny, liczby uczniów i ich suma

B średnia ważona z tabelki A
→ wynik i litera odpowiedzi

A tabelka z diagramu

→ oceny, liczby uczniów i ich suma

1 Przepisujesz diagram do tabelki: pod każdą oceną wysokość jej słupka, potem sumujesz uczniów.



ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów	2	9	5	3	5	1

$2 + 9 + 5 + 3 + 5 + 1 = 25$

B średnia ważona z tabelki A

→ wynik i litera odpowiedzi

2 Liczba uczniów jest wagą oceny, więc wstawiasz tabelkę do wzoru na średnią ważoną.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{2 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{25}$$

3 Mnożysz każdą parę w liczniku, a potem dodajesz iloczyny.

$$\bar{s} = \frac{2 + 18 + 15 + 12 + 25 + 6}{25}$$

$$\bar{s} = \frac{78}{25}$$

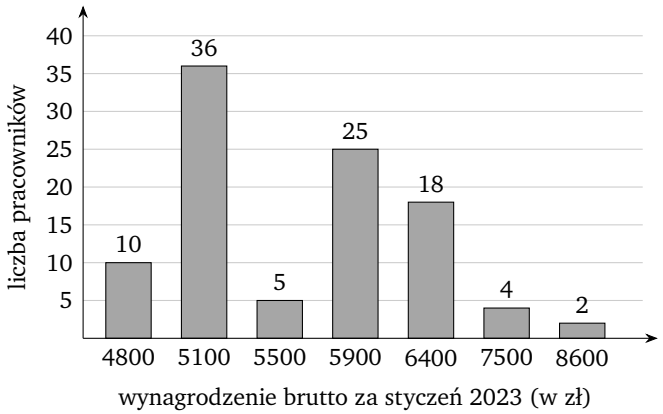
4 Dzielisz 78 przez 25 i szukasz tej liczby wśród odpowiedzi: to B.

$\bar{s} = 3{,}12$

WYNIK	$\bar{s} = 3{,}12$, odp. B

Zadanie 17 (matura sierpień 2023 – poprawkowa) (0-1)

Na diagramie przedstawiono rozkład wynagrodzenia brutto wszystkich stu pracowników pewnej firmy za styczeń 2023 roku.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Średnia wynagrodzenia brutto wszystkich pracowników tej firmy za styczeń 2023 roku jest równa

A. 5690 zł
B. 5280 zł
C. 6257 zł
D. 5900 zł

ZAMYSŁ

Każda kwota liczy się tyle razy, ilu pracowników ją dostało, więc liczba pracowników jest wagą w średniej ważonej. Najpierw porządkujemy diagram w tabelkę, a potem liczymy średnią ważoną do jednej liczby i wskazujemy literę.

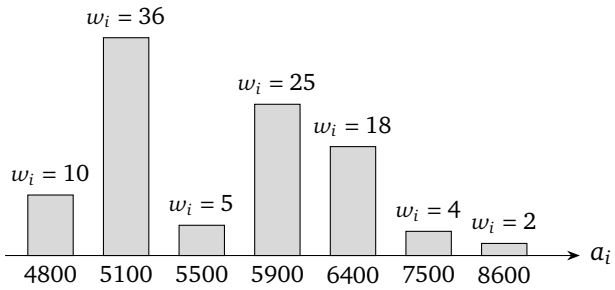
ZARYS

A tabelka z diagramu → wartości i liczności

B średnia ważona → wynik

A **tabelka z diagramu** → wartości i liczności

1 Przepisujesz diagram do tabelki; liczności dodają się do „stu pracowników”.



a_i	4800	5100	5500	5900	6400	7500	8600
w_i	10	36	5	25	18	4	2

$10 + 36 + 5 + 25 + 18 + 4 + 2 = 100$

B **średnia ważona** → wynik

2 Wstawiasz tabelkę do wzoru na średnią ważoną: kwota to wartość, liczba pracowników to waga.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{10 \cdot 4800 + 36 \cdot 5100 + 5 \cdot 5500 + 25 \cdot 5900 + 18 \cdot 6400 + 4 \cdot 7500 + 2 \cdot 8600}{100}$$

3 Liczysz każdy iloczyn w liczniku osobno, mianownik zostaje bez zmian.

$$\bar{s} = \frac{48000 + 183600 + 27500 + 147500 + 115200 + 30000 + 17200}{100}$$

4 Dodajesz iloczyny, dzielisz przez 100 i odczytujesz literę odpowiedzi.

$$\bar{s} = \frac{569000}{100}$$

$$\bar{s} = 5690$$

WYNIK $\bar{s} = 5690$ zł, odp. A

Zadanie 18 (matura maj 2016, 0–2)

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

ZAMYSŁ

Najpierw liczymy dokładną średnią jako ułamek, a dopiero potem ją zaokrąglamy. Błąd liczymy na ułamkach, żeby procent wyszedł dokładny.

ZARYS

A średni roczny przyrost → dokładna średnia

B zaokrąglenie i błędy → wynik

A średni roczny przyrost → dokładna średnia

1 Dodajesz sześć przyrostów z tabeli i dzielisz sumę przez liczbę lat, czyli przez 6.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\bar{a} = \frac{10 + 10 + 7 + 8 + 8 + 7}{6}$$

2 Liczysz sumę w liczniku i skracasz ułamek przez 2.

$$\bar{a} = \frac{50}{6}$$

$$\bar{a} = \frac{\overset{25}{\cancel{50}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}$$

$$\bar{a} = \frac{25}{3}$$

B **zaokrąglenie i błędy** → wynik

3 Zamieniasz ułamek na liczbę mieszaną i zaokrąglasz do całych centymetrów, bo jedna trzecia to mniej niż połowa.

$$\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$$
$$8\frac{1}{3} \approx 8$$

4 Błąd bezwzględny to moduł różnicy między dokładną średnią a przybliżeniem.

$$\left|\frac{25}{3} - 8\right| = \left|\frac{25}{3} - \frac{24}{3}\right|$$
$$= \frac{1}{3}$$

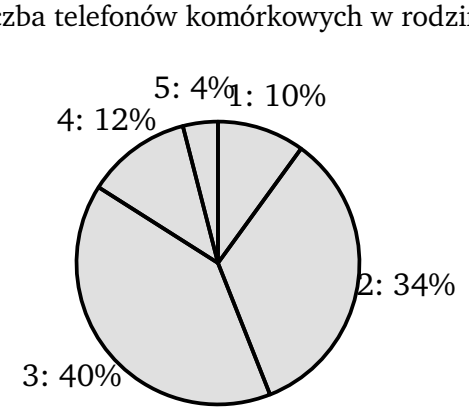
5 Błąd względny to błąd bezwzględny podzielony przez dokładną wartość, a wynik zamieniasz na procenty.

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{25}$$
$$= \frac{1}{25}$$
$$\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$$
$$= 0{,}04$$
$$= 4\%$$

WYNIK $\bar{a} \approx 8$ cm, błąd względny 4%

Zadanie 19

Diagram przedstawia, ile procent rodzin z pewnego osiedla ma 1, 2, 3, 4 lub 5 telefonów komórkowych.

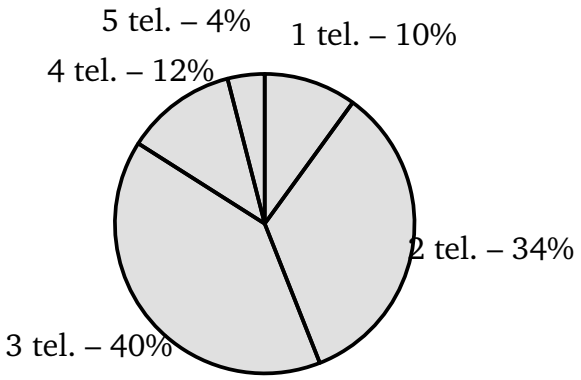


Średnia liczba telefonów komórkowych przypadających na jedną rodzinę jest równa
A. 3
B. 2,5
C. 2,86
D. 2,66

ZAMYSŁ

Procenty z diagramu mówią, jak często występuje każda liczba telefonów, więc są wagami. Liczymy średnią ważoną i na końcu porównujemy wynik z odpowiedziami.

1 Przepisujesz diagram do tabelki: liczba telefonów w rodzinie i procent rodzin jako waga.



a_i	1	2	3	4	5
w_i	10	34	40	12	4

2 Wstawiasz pary z tabelki do wzoru na średnią ważoną: liczba telefonów razy jej procent.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_5 a_5}{w_1 + w_2 + \ldots + w_5}$$

$$\bar{s} = \frac{10 \cdot 1 + 34 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{10 + 34 + 40 + 12 + 4}$$

3 Liczysz osobno iloczyny w liczniku i sumę wag w mianowniku, potem dzielisz.

$$\bar{s} = \frac{10 + 68 + 120 + 48 + 20}{100}$$

$$\bar{s} = \frac{266}{100} = 2{,}66$$

WYNIK	$\bar{s} = 2{,}66$, odp. D

Zadanie 20

Ola dostała w drugim semestrze następujące oceny z chemii: ze sprawdzianów $4, 5, 3$, z kartkówek $3, 4, 4, 5$, za aktywność $6, 5$. Oceny ze sprawdzianów mają wagę $0{,}6$, z kartkówek $0{,}3$, za aktywność $0{,}1$. Średnia ważona (zaokrąglona do dwóch miejsc po przecinku) ocen Oli z chemii w drugim semestrze jest równa

A. 4,33
B. 4,37
C. 4,09
D. 1,46

ZAMYSŁ

Każdą ocenę mnożymy przez jej wagę i dzielimy sumę tych iloczynów przez sumę wag wszystkich dziewięciu ocen. Na końcu zaokrąglamy iloraz do dwóch miejsc i wybieramy literę.

ZARYS

A licznik: oceny razy wagi → liczba w liczniku

B mianownik: suma wag → liczba w mianowniku

C iloraz i zaokrąglenie → wynik

A licznik: oceny razy wagi → liczba w liczniku

1 Zapisujesz wzór na średnią ważoną: iloczyny ocen i wag przez sumę wag.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

2 W liczniku każdą z dziewięciu ocen mnożysz przez jej wagę i dodajesz iloczyny.

$$\begin{aligned} &0{,}6 \cdot 4 + 0{,}6 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 5 \\ &= 2{,}4 + 3 + 1{,}8 + 0{,}9 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}5 + 0{,}6 + 0{,}5 \\ &= 13{,}1 \end{aligned}$$

B mianownik: suma wag → liczba w mianowniku

3 W mianowniku dodajesz wagę każdej oceny, czyli dziewięć wag, nie trzy.

$$0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1 = 3{,}2$$

C **iloraz i zaokrąglenie** → wynik

4 Dzielisz licznik przez mianownik, zaokrąglasz do dwóch miejsc i wybierasz odpowiedź C.

$$\bar{s} = \frac{13{,}1}{3{,}2} = \frac{131}{32}$$

$$\frac{131}{32} = 4{,}09375 \approx 4{,}09$$

WYNIK $\bar{s} \approx 4{,}09$, odp. C

Zadanie 21

Mieszkańców pewnej kamienicy zapytano, ile pokoi ma ich mieszkanie. Odpowiedzi zebrano w tabeli:

Liczba pokoi	Liczba mieszkań
1	4
x	10
4	6

Średnia liczba pokoi w mieszkaniu w tej kamienicy jest równa $2{,}9$. Wtedy liczba x jest równa

A. 3
B. 2
C. 5
D. 6

ZAMYSŁ

Liczba mieszkań to waga, z jaką liczy się każda liczba pokoi, więc średnią zapisujemy wzorem na średnią ważoną. Przyrównujemy ją do 2,9 i dostajemy równanie liniowe z jedną niewiadomą x. Na końcu zostaje liczba x i litera odpowiedzi.

1. Liczby pokoi to wartości, liczby mieszkań to wagi; wstawiasz je do wzoru.

$$\bar{s} = \frac{w_1a_1 + w_2a_2 + w_3a_3}{w_1 + w_2 + w_3}$$

$$\frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot x + 6 \cdot 4}{4 + 10 + 6} = 2{,}9$$

2. Mnożysz w liczniku i dodajesz wagi w mianowniku.

$$\frac{4 + 10x + 24}{20} = 2{,}9$$

$$\frac{10x + 28}{20} = 2{,}9$$

3. Mnożysz obie strony przez 20, odejmujesz 28 i dzielisz przez 10.

$$\frac{10x + 28}{20} = 2{,}9 \quad / \cdot 20$$

$$10x + 28 = 58 \quad / - 28$$

$$10x = 30 \quad / : 10$$

$$x = 3$$

WYNIK $x = 3$, odp. A

Zadanie 22

W tabeli zestawiono liczbę goli, które drużyna strzeliła w meczach jednego sezonu.

Liczba goli w meczu	0	1	2	3	4
Liczba meczów	6	7	x	4	1

Średnia liczba goli strzelonych w jednym meczu jest równa 1,5. Oblicz liczbę x meczów, w których drużyna strzeliła dwa gole.

ZAMYSŁ

Średnia ważona to suma goli ze wszystkich meczów podzielona przez liczbę meczów. Z tabeli układamy równanie z jedną niewiadomą x i rozwiązujemy je jak zwykłe równanie liniowe.

ZARYS

A równanie ze średniej ważonej → równanie z x

B rozwiązanie równania → wynik

A równanie ze średniej ważonej → równanie z x

1. Liczba goli to wartości, liczba meczów to wagi; wstawiasz je do średniej ważonej.

$$\bar{s} = \frac{w_1a_1 + w_2a_2 + \ldots + w_na_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\frac{6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + x \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{6 + 7 + x + 4 + 1} = 1{,}5$$

2. Osobno liczysz licznik, osobno mianownik.

$$\frac{0 + 7 + 2x + 12 + 4}{18 + x} = 1{,}5$$

$$\frac{23 + 2x}{18 + x} = 1{,}5$$

B rozwiązanie równania → wynik

3. Mnożysz obie strony przez $18 + x$, bo liczba meczów jest dodatnia.

$$\frac{23 + 2x}{18 + x} = 1{,}5 \qquad / \cdot (18 + x)$$

$$23 + 2x = 1{,}5 \cdot (18 + x)$$

$$23 + 2x = 27 + 1{,}5x$$

4 Przenosisz wyrazy z x na lewo, liczby na prawo i dzielisz.

$$\begin{aligned} 23 + 2x &= 27 + 1{,}5x && / - 1{,}5x \\ 23 + 0{,}5x &= 27 && / - 23 \\ 0{,}5x &= 4 && / : 0{,}5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

WYNIK $x = 8$

Zadanie 23

W teście można było zdobyć 10, 8, 5 albo 2 punkty. Wynik 10 punktów uzyskało 25% piszących, wynik 8 punktów połowa piszących, wynik 5 punktów sześć osób, a pozostali dostali 2 punkty. Średni wynik testu to 7,5 punktu. Ile osób zdobyło 10 punktów?

ZAMYSŁ

Liczbę wszystkich piszących oznaczamy n i przez nią zapisujemy liczność każdej grupy. Średnia ważona da jedno równanie z n, a na końcu weźmiemy 25% z n.

ZARYS

A	B	C
liczności grup	równanie średniej	osoby z 10 punktami
→ wagi przez n	→ n	→ wynik

A liczności grup

→ wagi przez n

1 Oznaczasz liczbę piszących n i zapisujesz liczności trzech pierwszych grup.

n – liczba piszących, $n > 0$

$w_1 = 0{,}25n$

$w_2 = 0{,}5n$

$w_3 = 6$

2 Pozostali to wszyscy minus trzy pierwsze grupy.

$w_4 = n - 0{,}25n - 0{,}5n - 6$

$w_4 = 0{,}25n - 6$

B równanie średniej

→ n

3 Zapisujesz wzór na średnią ważoną: punkty to wartości, liczności to wagi.

$$\bar{s} = \frac{w_1a_1 + w_2a_2 + w_3a_3 + w_4a_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}$$

$$\frac{10 \cdot 0{,}25n + 8 \cdot 0{,}5n + 5 \cdot 6 + 2 \cdot (0{,}25n - 6)}{0{,}25n + 0{,}5n + 6 + (0{,}25n - 6)} = 7{,}5$$

4 Wymnażasz licznik, a w mianowniku sumujesz wagi, które dają n.

$$\frac{2{,}5n + 4n + 30 + 0{,}5n - 12}{n} = 7{,}5$$

$$\frac{7n + 18}{n} = 7{,}5$$

5 Mnożysz obie strony przez n, bo $n > 0$, potem odejmujesz $7n$.

$$\frac{7n + 18}{n} = 7{,}5 \quad / \cdot n$$
$$7n + 18 = 7{,}5n \quad / - 7n$$
$$18 = 0{,}5n$$

6 Dzielisz obie strony przez 0,5.

$$18 = 0{,}5n \quad / : 0{,}5$$
$$36 = n$$
$$n = 36$$

C **osoby z 10 punktami** → wynik

7 Dziesięć punktów zdobyło 25% piszących, więc wstawiasz n do $0{,}25n$.

$0{,}25 \cdot 36 = 9$

WYNIK 9 osób

Zadanie 24 (matura czerwiec 2020, 0–1)

Cztery liczby: $2, 3, a, 8$, tworzące zestaw danych, są uporządkowane rosnąco. Mediana tego zestawu czterech danych jest równa medianie zestawu pięciu danych: $5, 3, 6, 8, 2$. Zatem

A. $a = 7$
B. $a = 6$
C. $a = 5$
D. $a = 4$

ZAMYSŁ

Najpierw liczymy medianę zestawu pięciu liczb, bo tam wszystko jest dane. Potem zapisujemy medianę zestawu czterech liczb z literą a i przyrównujemy ją do tej liczby. Z równania wychodzi a, a z niego litera odpowiedzi.

1 Porządkujesz pięć danych rosnąco; przy nieparzystej liczbie danych mediana jest środkowa.

$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8$

$\text{Me} = 5$

2 Liczby są „uporządkowane rosnąco”, więc mediana to średnia dwóch środkowych: 3 i a.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$2,\ 3,\ a,\ 8 \qquad 3 \le a \le 8$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{4}{2}} + a_{\frac{4}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(3 + a)$$

3 Przyrównujesz obie mediany, mnożysz obie strony przez 2 i wyznaczasz a.

$$\frac{1}{2}(3 + a) = 5 \quad / \cdot 2$$

$$3 + a = 10 \quad / - 3$$

$$a = 7 \quad \text{spełnia } 3 \le a \le 8$$

WYNIK $a = 7$, odp. A

Zadanie 25 (matura maj 2019) (0–1)

Mediana zestawu sześciu danych liczb: $4, 8, 21, a, 16, 25$, jest równa 14. Zatem
A. $a = 7$
B. $a = 12$
C. $a = 14$
D. $a = 20$

ZAMYSŁ

Ustawiamy dane rosnąco i patrzymy, gdzie musi stanąć a, żeby środek dał 14. Mediana sześciu liczb to średnia dwóch środkowych, więc dostajemy równanie liniowe na a.

ZARYS

A uporządkowanie danych → miejsce a w ciągu

B równanie z mediany → wynik

A uporządkowanie danych → miejsce a w ciągu

1. Porządkujesz pięć znanych liczb rosnąco, bo medianę czyta się z danych uporządkowanych.

   $4,\ 8,\ 16,\ 21,\ 25$

2. Mediana 14 leży między 8 a 16, więc a stoi między nimi i z 16 tworzy środek.

   $4,\ 8,\ a,\ 16,\ 21,\ 25$

B równanie z mediany → wynik

3. Danych jest sześć, więc mediana to średnia trzeciej i czwartej liczby; wstawiasz a i 16.

   $$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

   $$\text{Me} = \frac{1}{2}(a_3 + a_4)$$

   $$\frac{1}{2}(a + 16) = 14$$

4. Mnożysz obie strony przez 2, potem odejmujesz 16.

   $$\frac{1}{2}(a + 16) = 14 \quad / \cdot 2$$

   $$a + 16 = 28 \quad / -16$$

   $$a = 12$$ leży między 8 a 16

WYNIK $a = 12$, odp. B

Zadanie 26 (matura sierpień 2018 – poprawkowa) (0-1)

Abiturient jednego z liceów zestawił w tabeli oceny ze swojego świadectwa ukończenia szkoły.

Ocena	6	5	4	3	2
Liczba ocen	2	3	5	5	1

Mediana przedstawionego zestawu danych jest równa
A. 3
B. 3,5
C. 4
D. 4,5

ZAMYSŁ

Zliczamy wszystkie oceny, a potem wypisujemy je w jednym rzędzie od najmniejszej, żeby było widać, która stoi pośrodku. Danych jest parzyście wiele, więc środek to dwie oceny i bierzemy ich średnią. Na końcu zostaje jedna liczba i litera odpowiedzi.

1. Dodajesz liczby z dolnego wiersza tabeli, bo to liczba wszystkich ocen.

$n = 2 + 3 + 5 + 5 + 1$

$n = 16$

2. Wypisujesz oceny od najmniejszej, każdą tyle razy, ile podaje tabela.

$2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ \underline{4},\ \underline{4},\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6$

3. Liczba 16 jest parzysta, więc mediana to średnia ósmej i dziewiątej oceny.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{16}{2}} + a_{\frac{16}{2}+1}\right)$

$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_8 + a_9\right)$

$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(4 + 4\right)$

$\text{Me} = \frac{1}{2} \cdot 8$

$\text{Me} = 4$

WYNIK Me = 4, odp. C

Zadanie 27 (matura sierpień 2019 – poprawkowa) (0-1)

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb naturalnych $3, 10, 5, x, x, x, x, 12, 19, 7$ jest równa 12. Mediana tych liczb jest równa

A. 14
B. 12
C. 16
D. x

ZAMYSŁ

Z danej średniej wyznaczamy x, bo bez niego nie da się ułożyć liczb po kolei. Potem porządkujemy liczby i bierzemy średnią dwóch środkowych.

ZARYS

A wyznaczenie x ze średniej → x

B mediana uporządkowanych liczb → wynik

A wyznaczenie x ze średniej → x

1 Zapisujesz średnią dziesięciu liczb wzorem i przyrównujesz ją do 12.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{3 + 10 + 5 + x + x + x + x + 12 + 19 + 7}{10} = 12$$

2 W liczniku dodajesz osobno znane liczby i osobno iksy.

$$\frac{56 + 4x}{10} = 12$$

3 Mnożysz obie strony przez 10, żeby pozbyć się mianownika.

$$\frac{56 + 4x}{10} = 12 \quad / \cdot 10$$
$$56 + 4x = 120$$

4 Odejmujesz 56 od obu stron, potem dzielisz obie strony przez 4.

$$56 + 4x = 120 \quad / - 56$$
$$4x = 64 \quad / : 4$$
$$x = 16$$

B **mediana uporządkowanych liczb** → wynik

5 Wstawiasz $x = 16$ i ustawiasz wszystkie dziesięć liczb od najmniejszej do największej.

$3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 16,\ 16,\ 16,\ 16,\ 19$

6 Liczb jest dziesięć, czyli parzyście, więc mediana to średnia piątej i szóstej.

$\text{Me} = \frac{1}{2}(a_5 + a_6)$

$\text{Me} = \frac{1}{2}(12 + 16)$

7 Dodajesz liczby w nawiasie i dzielisz przez 2, potem wybierasz odpowiedź A.

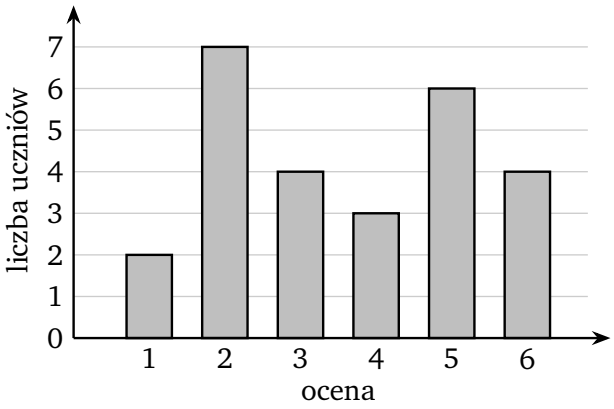
$\text{Me} = \frac{1}{2} \cdot 28$

$\text{Me} = 14$

WYNIK $\text{Me} = 14,$ odp. A

Zadanie 28 (matura maj 2024) (0-1)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa
A. 4,5
B. 4
C. 3,5
D. 3

ZAMYSŁ

Najpierw porządkujemy dane z diagramu w tabelkę, bo z niej widać, ilu jest uczniów i które oceny stoją na środkowych miejscach. Mediana to średnia dwóch środkowych ocen.

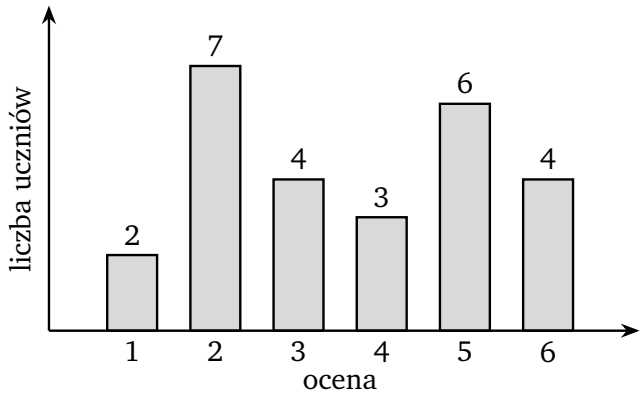
ZARYS

A tabelka liczności
→ liczba uczniów n

B mediana z tabelki A
→ wynik

A **tabelka liczności** → liczba uczniów n

1 Przepisujesz diagram do tabelki: nad kreską ocena, pod nią liczba uczniów; oceny już stoją rosnąco.



ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów	2	7	4	3	6	4

2 Dodajesz liczby z dolnego wiersza tabelki, żeby wiedzieć, ilu uczniów pisało sprawdzian.

$n = 2 + 7 + 4 + 3 + 6 + 4$

$n = 26$

B **mediana z tabelki A** → wynik

3 Liczba uczniów jest parzysta, więc mediana to średnia dwóch środkowych ocen.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{26}{2}} + a_{\frac{26}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{13} + a_{14}\right)$$

4 Odliczasz miejsca w tabelce: jedynki 1–2, dwójki 3–9, trójki 10–13, czwórki 14–16.

ocena	1	2	3	4
miejsca	1–2	3–9	10–13	14–16

$a_{13} = 3$

$a_{14} = 4$

5 Wstawiasz obie środkowe oceny do wzoru i liczysz średnią.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(3 + 4)$$
$$\text{Me} = \frac{1}{2} \cdot 7$$
$$\text{Me} = 3{,}5$$

WYNIK Me = 3,5, odp. C

Zadanie 29

W tabeli podano, jaki procent uczestników quizu zdobył daną liczbę punktów.

Liczba punktów	Procent uczestników
2	15%
4	30%
6	35%
8	20%

Mediana liczby punktów zdobytych przez uczestników quizu jest równa
A. 4
B. 5
C. 6
D. 7

ZAMYSŁ

Zamieniamy procenty na liczby osób, przyjmując 100 uczestników, i ustawiamy wyniki rosnąco. Mediana to średnia dwóch środkowych wyników, więc sprawdzamy, ile punktów mają osoby na miejscach 50 i 51.

ZARYS

A liczby osób z procentów → liczności grup

B miejsca środkowe → a_{50}, a_{51}

C mediana → wynik

A liczby osób z procentów

→ liczności grup

1. Przyjmujesz 100 uczestników, więc procent to od razu liczba osób w grupie.

$n = 100$

liczba punktów	2	4	6	8
liczba osób	15	30	35	20

$15 + 30 + 35 + 20 = 100$

B miejsca środkowe

→ a_{50}, a_{51}

2. Liczba wyników jest parzysta, więc mediana to średnia wyrazów na miejscach 50 i 51.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{100}{2}} + a_{\frac{100}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{50} + a_{51}\right)$$

3 Ustawiasz wyniki rosnąco i sumujesz osoby grupami, żeby znać koniec każdej grupy.

15 2 punkty: miejsca 1–15

15 + 30 = 45 4 punkty: miejsca 16–45

15 + 30 + 35 = 80 6 punktów: miejsca 46–80

4 Miejsca od 46 do 80 mają po 6 punktów, więc oba środkowe wyrazy to szóstki.

$a_{50} = 6$

$a_{51} = 6$

C **mediana** → wynik

5 Wstawiasz oba środkowe wyrazy do wzoru na medianę i liczysz średnią.

$\text{Me} = \frac{1}{2}(6 + 6)$

$\text{Me} = \frac{1}{2} \cdot 12$

$\text{Me} = 6$

WYNIK Me = 6, odp. C

Zadanie 30

Mediana pięciu liczb jest równa 10, a ich średnia arytmetyczna jest równa 8. Oblicz sumę czterech liczb tego zestawu innych niż mediana.

ZAMYSŁ

Średnia mówi nam, ile wynosi suma wszystkich pięciu liczb, a mediana to jedna z nich. Odejmujemy medianę od tej sumy i zostaje suma czterech pozostałych.

ZARYS

A zapis mediany i średniej → równanie na sumę liczb

B suma czterech liczb → wynik

A zapis mediany i średniej → równanie na sumę liczb

1. Ustawiasz pięć liczb rosnąco jako a, b, c, d, e; mediana to środkowa, więc $c = 10$.

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e$$
$$c = 10$$

2. Średnia to suma pięciu liczb podzielona przez pięć; wstawiasz 10 w miejsce c.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 8$$
$$\frac{a + b + 10 + d + e}{5} = 8 \quad / \cdot 5$$

B suma czterech liczb → wynik

3. Mnożysz obie strony przez 5, żeby pozbyć się mianownika.

$$a + b + 10 + d + e = 40 \quad / - 10$$

4. Odejmujesz 10 od obu stron i zostaje suma czterech liczb innych niż mediana.

$$a + b + d + e = 30$$

WYNIK $a + b + d + e = 30$

Zadanie 31

Mediana danych zawartych w tabeli liczebności jest równa 2.

Wartość	1	2	3	4	5
Liczebność	4	x	3	2	5

Zatem x może być równe
A. 4
B. 5
C. 6
D. 7

ZAMYSŁ

Ustawiamy dane rosnąco i zapisujemy, na których miejscach stoją dwójki. Potem dla każdej odpowiedzi sprawdzamy, czy środkowe miejsce wypada wśród dwójek.

ZARYS

A liczba danych i miejsca wartości → n i miejsca dwójek

B sprawdzenie odpowiedzi A, B, C → mediany różne od 2

C sprawdzenie odpowiedzi D → wynik

A liczba danych i miejsca wartości

→ n i miejsca dwójek

1. Sumujesz liczebności, a z wzoru na medianę bierzesz wyraz środkowy albo średnią dwóch środkowych.

$$n = 4 + x + 3 + 2 + 5 = 14 + x$$

$$\text{Me} = a_{\frac{n+1}{2}} \ (n \text{ nieparzyste}), \quad \text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right) \ (n \text{ parzyste})$$

2. Odliczasz miejsca: cztery jedynki na początku, za nimi x dwójek, potem trójki.

$$a_1 = \ldots = a_4 = 1$$

$$a_5 = \ldots = a_{4+x} = 2$$

B sprawdzenie odpowiedzi A, B, C

→ mediany różne od 2

3. Dla $x = 4$ danych jest 18, dwójki kończą się na ósmym miejscu, więc środek to trójki.

$$n = 14 + 4$$

$$n = 18, \quad \text{Me} = \frac{1}{2}(a_9 + a_{10})$$

$$4 + x = 8, \quad a_9 = a_{10} = 3$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(3 + 3) = 3$$

4 Dla $x = 5$ danych jest 19, dwójki kończą się na dziewiątym miejscu, środek jest dziesiąty.

$n = 14 + 5$

$n = 19, \quad \text{Me} = a_{10}$

$4 + x = 9, \quad a_{10} = 3$

$\text{Me} = 3$

5 Dla $x = 6$ danych jest 20, dziesiąte miejsce to dwójka, jedenaste to trójka.

$n = 14 + 6$

$n = 20, \quad \text{Me} = \frac{1}{2}(a_{10} + a_{11})$

$4 + x = 10, \quad a_{10} = 2, \quad a_{11} = 3$

$\text{Me} = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2{,}5$

C **sprawdzenie odpowiedzi D** → wynik

6 Dla $x = 7$ danych jest 21, dwójki sięgają środka, czyli jedenastego miejsca.

$n = 14 + 7$

$n = 21, \quad \text{Me} = a_{11}$

$4 + x = 11, \quad a_{11} = 2$

$\text{Me} = 2$

WYNIK	$x = 7$, odp. D

Zadanie 32

Pięć różnych liczb naturalnych zapisano w kolejności od najmniejszej do największej: $2, a, b, c, 12$. Mediana liczb: $2, a, b, c$ jest równa 3,5, a mediana liczb: $b, c, 12$ jest równa 9. Liczba b jest równa

A. 3
B. 4
C. 5
D. 6

ZAMYSŁ

Mediana czterech uporządkowanych liczb to średnia dwóch środkowych, czyli a i b, więc dostajemy sumę $a + b$. Liczby są naturalne, różne i rosną od 2, więc taką sumę da tylko jedna para. Druga mediana daje $c = 9$ i do wyznaczenia b nie jest potrzebna.

1. Liczb $2, a, b, c$ jest cztery, więc mediana to średnia środkowych: a i b.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$$
$$\frac{1}{2}(a + b) = 3{,}5$$

2. Mnożysz obie strony przez 2, żeby pozbyć się ułamka.

$$\frac{1}{2}(a + b) = 3{,}5 \quad / \cdot 2$$
$$a + b = 7$$

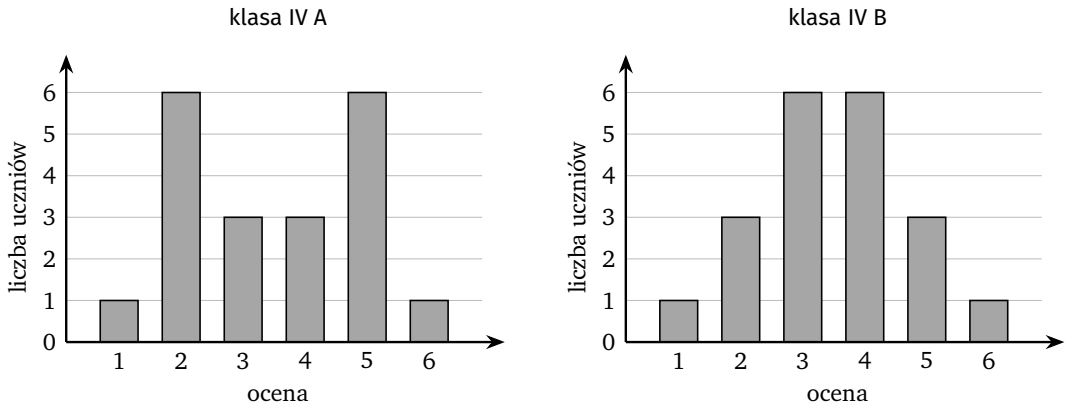
3. Z „różnych liczb naturalnych” w kolejności rosnącej masz $2 < a < b$, więc sumę 7 dają tylko 3 i 4.

$$2 < a < b$$
$$a + b = 7$$
$$a = 3$$
$$b = 4$$

WYNIK $b = 4$, odp. B

Zadanie 33 (matura maj 2026) (0-1)

Nauczyciel matematyki po każdym sprawdzianie porównuje wyniki uzyskane przez uczniów dwóch klas: klasy IV A oraz klasy IV B. Na dwóch poniższych diagramach przedstawiono wyniki sprawdzianu ze statystyki, jakie uzyskali uczniowie tych klas. Na osiach poziomych podano oceny, które uzyskali uczniowie tych klas, a na osiach pionowych podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych ze sprawdzianu ze statystyki przez uczniów klasy IV A jest równa średniej arytmetycznej ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów klasy IV B.	**P**	**F**
Mediana ocen uzyskanych ze sprawdzianu ze statystyki przez uczniów klasy IV A jest równa medianie ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów klasy IV B.	**P**	**F**

ZAMYSŁ

Diagramy zamieniamy na tabelkę liczności, bo z niej liczymy średnią i medianę obu klas tym samym schematem. Na końcu porównujemy wyniki.

ZARYS

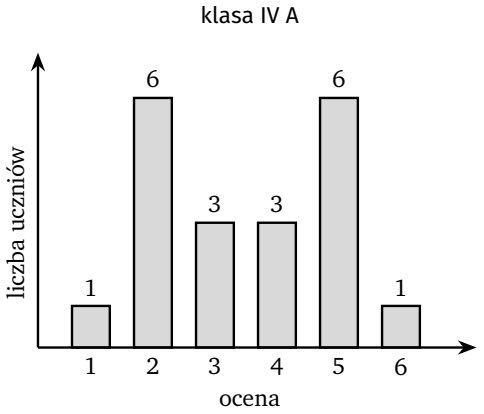
A tabelka liczności
→ liczby uczniów w klasach

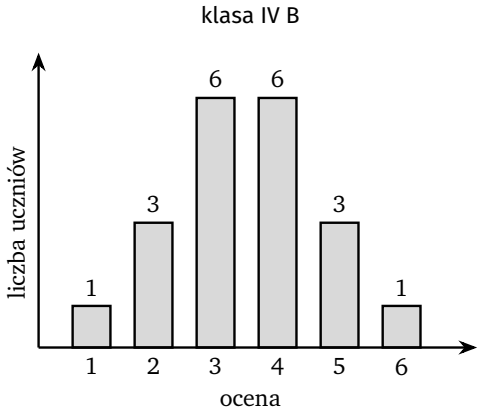
B średnie obu klas z tabelki A
→ ocena stwierdzenia o średniej

C mediany obu klas z tabelki A
→ ocena stwierdzenia o medianie

A **tabelka liczności** → liczby uczniów w klasach

1 Przepisujesz oba diagramy do tabelki ocena – liczba uczniów i sumujesz uczniów w klasach.





ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów IV A	1	6	3	3	6	1
liczba uczniów IV B	1	3	6	6	3	1

$n_A = 1 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 20$

$n_B = 1 + 3 + 6 + 6 + 3 + 1 = 20$

B **średnie obu klas z tabelki A** → ocena stwierdzenia o średniej

2 Liczysz średnią ocen klasy IV A jako średnią ważoną, wagami są liczby uczniów.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s}_A = \frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{20}$$

$$\bar{s}_A = \frac{1 + 12 + 9 + 12 + 30 + 6}{20}$$

$$\bar{s}_A = \frac{70}{20} = 3{,}5$$

3 Tak samo liczysz średnią klasy IV B i porównujesz ją ze średnią klasy IV A.

$$\bar{s}_B = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{20}$$

$$\bar{s}_B = \frac{1 + 6 + 18 + 24 + 15 + 6}{20}$$

$$\bar{s}_B = \frac{70}{20} = 3{,}5$$

$\bar{s}_A = \bar{s}_B$ stwierdzenie 1: P

C **mediany obu klas z tabelki A** → ocena stwierdzenia o medianie

4 Uczniów jest 20, liczba parzysta, więc bierzesz średnią dziesiątej i jedenastej uporządkowanej oceny.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{20}{2}} + a_{\frac{20}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{10} + a_{11}\right)$$

5 W klasie IV A dodajesz liczności po kolei i odczytujesz miejsca ocen 3 i 4.

ocena	1	2	3	4
liczba uczniów	1	6	3	3
miejsca	1	2–7	8–10	11–13

$1,\ 7,\ 10,\ 13:\quad a_{10} = 3,\ a_{11} = 4$

$$\text{Me}_A = \frac{1}{2}(3+4) = 3{,}5$$

6 Tak samo liczysz w klasie IV B, potem porównujesz mediany i oceniasz oba stwierdzenia.

ocena	1	2	3	4
liczba uczniów	1	3	6	6
miejsca	1	2–4	5–10	11–16

$1,\ 4,\ 10,\ 16:\quad a_{10} = 3,\ a_{11} = 4$

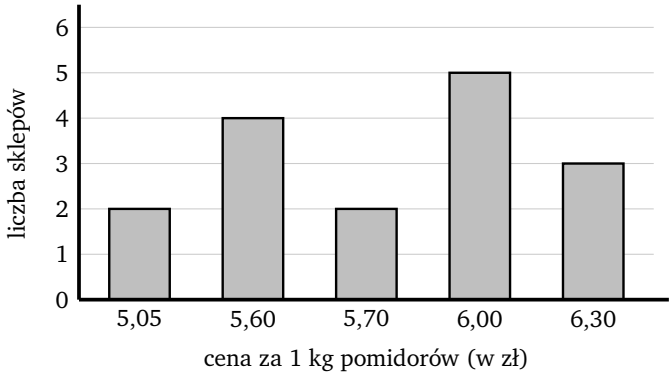
$$\text{Me}_B = \frac{1}{2}(3+4) = 3{,}5$$

$\text{Me}_A = \text{Me}_B$ stwierdzenie 2: P

WYNIK	1. P, 2. P

Zadanie 34 (matura maj 2023) (0-2)

Na diagramie poniżej przedstawiono ceny pomidorów w szesnastu wybranych sklepach.



Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–E.

1.	Mediana ceny kilograma pomidorów w tych wybranych sklepach jest równa	
2.	Średnia cena kilograma pomidorów w tych wybranych sklepach jest równa	

A. 5,80 zł
B. 5,73 zł
C. 5,85 zł
D. 6,00 zł
E. 5,70 zł

ZAMYSŁ

Przepisujemy diagram do tabelki i przy każdej cenie zapisujemy, które miejsca zajmuje w szeregu od najtańszej. Z tego odczytujemy ósmą i dziewiątą cenę do mediany, a średnią liczymy jako ważoną, z liczbą sklepów jako wagą.

ZARYS

A tabelka z diagramu → liczba sklepów i numery miejsc

B mediana → odpowiedź do wiersza 1

C średnia ważona → odpowiedź do wiersza 2

A **tabelka z diagramu** → liczba sklepów i numery miejsc

1 Przepisujesz diagram do tabelki: cena i liczba sklepów, a potem dodajesz liczby sklepów.

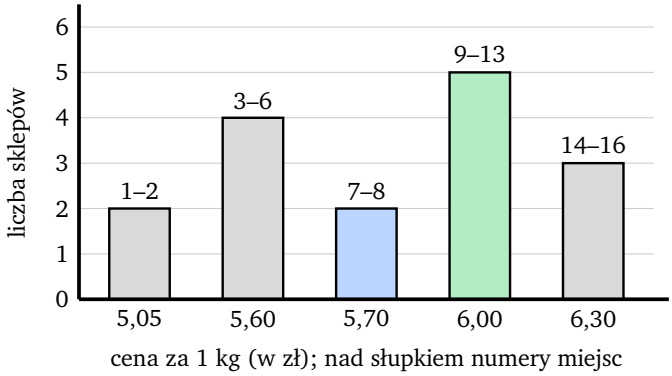
cena za 1 kg (zł)	5,05	5,60	5,70	6,00	6,30
liczba sklepów	2	4	2	5	3

$n = 2 + 4 + 2 + 5 + 3$

$n = 16$

2 Przy każdej cenie dopisujesz numery miejsc w szeregu od najtańszej.

cena za 1 kg (zł)	5,05	5,60	5,70	6,00	6,30
liczba sklepów	2	4	2	5	3
numery miejsc	1–2	3–6	7–8	9–13	14–16



cena za 1 kg (w zł); nad słupkiem numery miejsc

$a_8 = 5{,}70$

$a_9 = 6{,}00$

B **mediana** → odpowiedź do wiersza 1

3 Sklepów jest parzyście wiele, więc mediana to średnia ósmej i dziewiątej ceny.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_8 + a_9\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(5{,}70 + 6{,}00\right)$$

4 Dodajesz obie ceny i dzielisz przez dwa, a potem szukasz kwoty wśród odpowiedzi.

$$\text{Me} = \frac{1}{2} \cdot 11{,}70$$

$$\text{Me} = 5{,}85$$

wiersz 1: odp. C

C **średnia ważona** → odpowiedź do wiersza 2

5 Liczysz średnią ważoną: ceny mnożysz przez liczby sklepów, a sumę dzielisz przez 16.

$$\bar{s} = \frac{w_1a_1 + w_2a_2 + \ldots + w_na_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{2 \cdot 5{,}05 + 4 \cdot 5{,}60 + 2 \cdot 5{,}70 + 5 \cdot 6{,}00 + 3 \cdot 6{,}30}{16}$$

6 Mnożysz każdą parę, a potem dodajesz iloczyny w liczniku.

$$\bar{s} = \frac{10{,}10 + 22{,}40 + 11{,}40 + 30{,}00 + 18{,}90}{16}$$

$$\bar{s} = \frac{92{,}80}{16}$$

7 Dzielisz sumę przez 16 i szukasz tej kwoty wśród odpowiedzi.

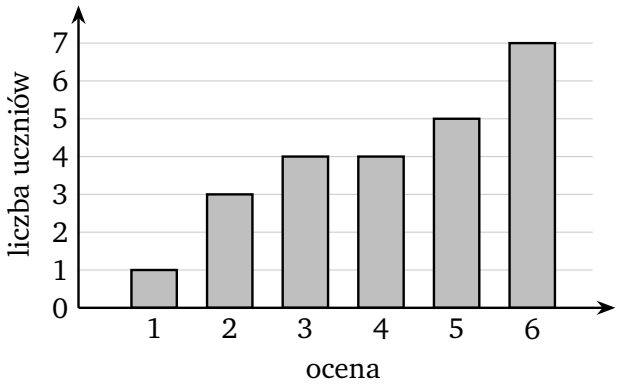
$\bar{s} = 5{,}80$

wiersz 2: odp. A

WYNIK	1. Me = 5,85 zł, odp. C; 2. $\bar{s} = 5{,}80$ zł, odp. A

Zadanie 35 (matura maj 2025) (0–2)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej liczącej 24 uczniów. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

1. Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa .....
2. Dominanta ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa .....

ZAMYSŁ

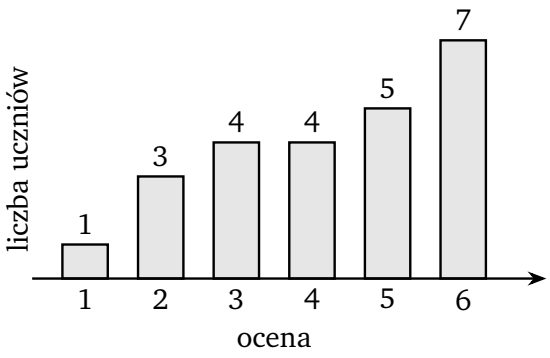
Przepisujemy diagram do tabelki, bo z liczb łatwiej odliczyć miejsca w uporządkowanym ciągu ocen. Medianę bierzemy ze środka 24 ocen, a dominantę z największej liczby uczniów.

ZARYS

A	B	C
tabelka liczności	mediana	dominanta
→ liczba wszystkich ocen	→ wynik zdania 1.	→ wynik zdania 2.

A **tabelka liczności** → liczba wszystkich ocen

1 Przepisujesz diagram do tabelki: ocena i liczba uczniów, a potem sumujesz liczby uczniów.



ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów	1	3	4	4	5	7

$1 + 3 + 4 + 4 + 5 + 7 = 24$

$n = 24$

B **mediana** → wynik zdania 1.

2 Liczba ocen jest parzysta, więc mediana to średnia dwóch środkowych ocen w uporządkowanym ciągu.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{24}{2}} + a_{\frac{24}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{12} + a_{13}\right)$$

3 Dodajesz liczby uczniów od oceny 1 i znajdujesz oceny na miejscach 12 i 13.

$$1 + 3 + 4 + 4 = 12$$

$$1 + 3 + 4 + 4 + 5 = 17$$

Miejsca od 9 do 12 zajmują czwórki, a od 13 do 17 piątki.

$a_{12} = 4$, $a_{13} = 5$

4 Wstawiasz obie środkowe oceny do wzoru i liczysz średnią.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(4 + 5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9$$

$$\text{Me} = 4{,}5$$

C **dominanta** → wynik zdania 2.

5 Dominanta to ocena, którą dostało najwięcej uczniów, czyli ta z najwyższym słupkiem.

$$\max\{1, 3, 4, 4, 5, 7\} = 7$$

$$\text{Mo} = 6$$

WYNIK	1. Me = 4,5,	2. Mo = 6

Zadanie 36 (matura sierpień 2026 – poprawkowa – stara formuła) (0-2)

Wśród 100 osób przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie: *Ile godzin snu potrzebujesz, aby być wypoczętym?* Każdy z ankietowanych zaznaczył dokładnie jedną odpowiedź. Wyniki ankiety przedstawiono w poniższej tabeli.

Deklarowana liczba godzin snu	5	6	7	8	9
Liczba osób, które zadeklarowały daną liczbę godzin snu	4	14	32	38	12

Oblicz średnią arytmetyczną oraz medianę deklarowanej liczby godzin snu przez ankietowanych.

ZAMYSŁ

Do średniej sumujemy wszystkie 100 odpowiedzi, jednakowe zbierając mnożeniem, i dzielimy przez 100. Medianę dają dwie środkowe odpowiedzi, 50. i 51., które znajdujemy, dodając liczby osób od lewej strony.

ZARYS

A średnia arytmetyczna → $\bar{a}$

B mediana z pozycji 50 i 51 → Me

A średnia arytmetyczna → $\bar{a}$

1 Sumujesz wszystkie 100 odpowiedzi: cztery piątki to $4 \cdot 5$, czternaście szóstek to $14 \cdot 6$.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\bar{a} = \frac{4 \cdot 5 + 14 \cdot 6 + 32 \cdot 7 + 38 \cdot 8 + 12 \cdot 9}{100}$$

2 Liczysz każdy iloczyn, potem dodajesz je i dzielisz przez 100.

$$\bar{a} = \frac{20 + 84 + 224 + 304 + 108}{100}$$

$$\bar{a} = \frac{740}{100} = 7{,}4$$

B **mediana z pozycji 50 i 51** → Me

3 Odpowiedzi jest 100, czyli parzyście, więc mediana to średnia wyrazu 50. i 51.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{100}{2}} + a_{\frac{100}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{50} + a_{51}\right)$$

4 Ustawiasz odpowiedzi od najmniejszej i dodajesz liczby osób od lewej do 50. i 51.

$4 + 14 + 32 = 50$, więc $a_{50} = 7$

$4 + 14 + 32 + 38 = 88$, więc $a_{51} = 8$

5 Wstawiasz oba środkowe wyrazy do wzoru na medianę i liczysz.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(7 + 8)$$

$$\text{Me} = 7{,}5$$

WYNIK	$\bar{a} = 7{,}4$ h, Me = 7,5 h

Zadanie 37 (matura czerwiec 2025) (0–3)

W tabeli zestawiono liczbę punktów uzyskanych przez 32 uczniów pewnej klasy za rozwiązanie jednego z zadań ze sprawdzianu z matematyki.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów, którzy otrzymali daną liczbę punktów	4	2	5	5	11	5

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. 1. Wynik niższy od średniej arytmetycznej liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania uzyskało dokładnie ..... uczniów tej klasy.

2. Mediana liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania jest równa .....

3. Dominanta liczby punktów otrzymanych przez tych uczniów za rozwiązanie tego zadania jest równa .....

ZAMYSŁ

Najpierw liczymy średnią z tabeli, w której liczby uczniów są wagami, i zliczamy uczniów z mniejszą liczbą punktów. Medianę czytamy z wypisanego rosnąco ciągu 32 wyników jako średnią wyrazów szesnastego i siedemnastego. Dominantę czytamy z kolumny z największą liczbą uczniów.

1.

1 Liczysz średnią ważoną: punkty razy liczba uczniów, w mianowniku wszyscy uczniowie.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{4 + 2 + 5 + 5 + 11 + 5}$$

2 Wymnażasz i dodajesz w liczniku, a potem dzielisz przez 32.

$$\bar{s} = \frac{0 + 2 + 10 + 15 + 44 + 25}{32}$$

$$\bar{s} = \frac{96}{32}$$

$$\bar{s} = 3$$

3 Warunek „niższy od średniej” spełniają wyniki 0, 1 i 2, więc dodajesz uczniów.

$$x < 3$$

$$4 + 2 + 5 = 11$$

WYNIK 11

2.

1 Wypisujesz wszystkie 32 wyniki rosnąco, grupami według kolumn tabeli.

$$0,0,0,0,\ 1,1,\ 2,2,2,2,2,\ 3,3,3,3,3,\ \underbrace{4,\ldots,4}_{11},\ 5,5,5,5,5$$

2 Uczniów jest parzyście wielu, więc bierzesz wyrazy szesnasty i siedemnasty.

$a_{16} = 3$ ostatnia trójka

$a_{17} = 4$ pierwsza czwórka

3 Podstawiasz te dwa wyrazy do wzoru na medianę i liczysz.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(3+4)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 7$$
$$\text{Me} = 3{,}5$$

WYNIK 3,5

3.

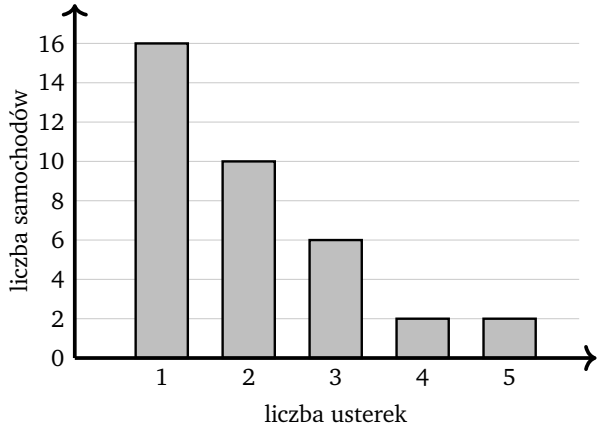
1 Dominanta to wynik z największą liczbą uczniów: 4 punkty uzyskało aż 11 osób.

$$\text{Mo} = 4$$

WYNIK 4

Zadanie 38 (matura sierpień 2025 – poprawkowa) (0–3)

W stacji diagnostycznej odnotowywano liczby usterek wykrytych podczas przeglądów technicznych pięcioletnich samochodów w lipcu 2025 roku. Wszystkie odnotowane wyniki przedstawiono na poniższym diagramie. Na osi poziomej podano liczbę usterek, które zostały wykryte podczas przeglądów, a na osi pionowej podano liczbę samochodów, w których wykryto daną liczbę usterek.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

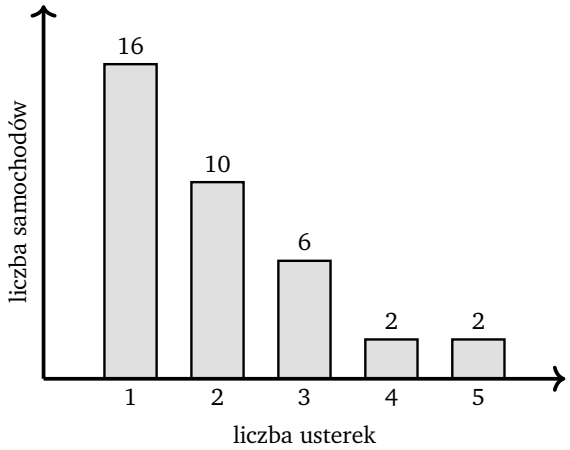
1. Dominanta liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów jest równa .....
2. Średnia arytmetyczna liczby usterek wykrytych na tej stacji podczas tych przeglądów jest równa .....
3. Liczba samochodów, w których wykryto podczas tych przeglądów co najmniej dwie usterki, stanowi ..... procent liczby samochodów, w których wykryto dokładnie jedną usterkę.

ZAMYSŁ

Najpierw przepisujemy diagram do tabelki: ile usterek i ile samochodów. Dominantę, średnią i procent odczytujemy potem z tej jednej tabelki.

1.

1 Przepisujesz wysokości słupków do tabelki: liczba usterek nad liczbą samochodów.



liczba usterek	1	2	3	4	5
liczba samochodów	16	10	6	2	2

2 Dominanta to liczba usterek o największej liczbie samochodów, a nie wysokość słupka.

$D = 1$

WYNIK 1

2.

1 Liczby samochodów są wagami, więc w średniej ważonej każdą liczbę usterek mnożysz przez jej wagę.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{16 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{16 + 10 + 6 + 2 + 2}$$

2 Liczysz osobno licznik i mianownik, potem skracasz ułamek.

$$\bar{s} = \frac{16 + 20 + 18 + 8 + 10}{36}$$

$$\bar{s} = \frac{72}{36}$$

3 Kończysz dzielenie.

$\bar{s} = 2$

WYNIK 2

3.

1 Słowa „co najmniej dwie” oznaczają 2, 3, 4 albo 5 usterek, więc dodajesz te słupki.



$10 + 6 + 2 + 2 = 20$

2 Samochodów z „dokładnie jedną” usterką jest 16, więc 20 dzielisz przez 16 i mnożysz przez 100%.

$$p = \frac{20}{16} \cdot 100\%$$

$$p = \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \cdot 100\%$$

$$p = \frac{5}{4} \cdot 100\%$$

$$p = 125\%$$

WYNIK	125

Zadanie 39

Na diagramie przedstawiono oceny z pracy klasowej z fizyki w pewnej klasie. Pod słupkami podano oceny, a wysokość słupka mówi, ilu uczniów dostało daną ocenę.



Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Dominantą ocen z tej pracy klasowej jest

A. 4		1. tę ocenę dostało najwięcej uczniów.
B. 5	ponieważ	2. ta ocena jest największą z wystawionych ocen.
C. 6		3. iloczyn tej oceny i liczby uczniów, którzy ją dostali, jest największy.

ZAMYSŁ

Przepisujemy diagram do tabelki i szukamy oceny, którą dostało najwięcej uczniów, bo to jest dominanta. Na końcu zostaje ta ocena i pasujące do niej uzasadnienie.

1. Przepisujesz wysokości słupków do tabelki: pod każdą oceną liczba uczniów, którzy ją dostali.



ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów	2	3	4	7	6	3

2. Dominanta to ocena, która występuje najczęściej, więc szukasz największej liczby w dolnym wierszu.

$$\max\{2, 3, 4, 7, 6, 3\} = 7$$

$$\text{Mo} = 4$$

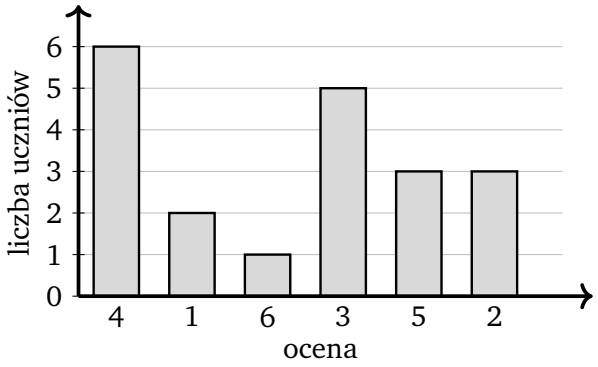
3 Dobierasz uzasadnienie: ocenę 4 dostało najwięcej uczniów, a największa ocena i iloczyn nie mówią o częstości.

A, 1

WYNIK	Mo = 4, odp. A1

Zadanie 40

Na diagramie przedstawiono oceny z kartkówki z geografii w pewnej klasie.



a) Oblicz medianę ocen z tej kartkówki.
b) Oblicz średnią arytmetyczną ocen z tej kartkówki.

ZAMYSŁ

Najpierw porządkujemy diagram w tabelkę z ocenami po kolei, bo słupki stoją pomieszane. Z tabelki bierzemy dwie środkowe oceny do mediany, a do średniej mnożymy każdą ocenę przez liczbę uczniów.

a)

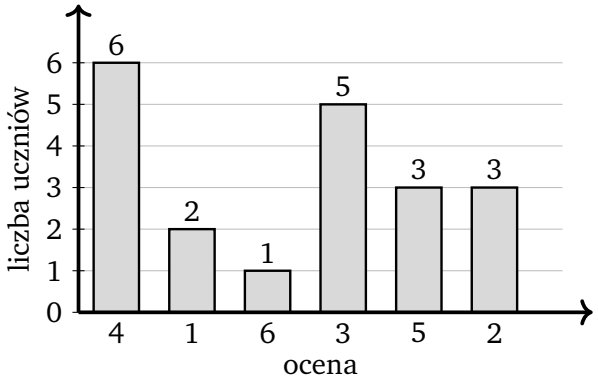
ZARYS

A tabelka liczności → liczba uczniów n

B mediana → wynik a)

A **tabelka liczności** → liczba uczniów n

1 Przepisujesz diagram do tabelki z ocenami od 1 do 6 i liczysz wszystkich uczniów.



ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów	2	3	5	6	3	1

$n = 2 + 3 + 5 + 6 + 3 + 1$

$n = 20$

B **mediana** → wynik a)

2 Uczniów jest parzyście wielu, więc mediana to średnia dwóch środkowych ocen.

$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$

$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{20}{2}} + a_{\frac{20}{2}+1}\right)$

$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{10} + a_{11}\right)$

3 Wypisujesz oceny rosnąco w rzędzie i odliczasz dziesiątą oraz jedenastą.

miejsce	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ocena	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3
miejsce	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ocena	4	4	4	4	4	4	5	5	5	6

$a_{10} = 3$ $a_{11} = 4$

4 Wstawiasz obie środkowe oceny do wzoru i liczysz medianę.

$\text{Me} = \frac{1}{2}(3 + 4)$

$\text{Me} = \frac{7}{2}$

$\text{Me} = 3{,}5$

WYNIK $\text{Me} = 3{,}5$

b)

1 Każdą ocenę mnożysz przez liczbę uczniów z tabelki, a sumę dzielisz przez 20.

$$\bar{s} = \frac{w_1a_1 + w_2a_2 + \ldots + w_na_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{20}$$

2 Liczysz iloczyny, dodajesz je i dzielisz przez liczbę uczniów.

$$\bar{s} = \frac{2 + 6 + 15 + 24 + 15 + 6}{20}$$

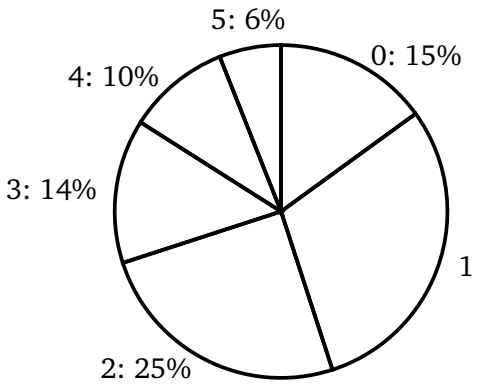
$$\bar{s} = \frac{68}{20}$$

$\bar{s} = 3{,}4$

WYNIK $\bar{s} = 3{,}4$

Zadanie 41

Wśród 400 osób przeprowadzono ankietę. Każdy odpowiadał na pytanie, ile razy był w teatrze w 2025 roku. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie.



liczba wizyt w teatrze w 2025 roku

a) Oblicz średnią liczbę wizyt w teatrze przypadającą na jedną ankietowaną osobę.
b) Wyznacz dominantę liczby wizyt w teatrze.
c) Oblicz, ile ankietowanych osób było w teatrze więcej razy, niż wynosi mediana liczby wizyt.

ZAMYSŁ

Z diagramu robimy tabelkę: ile osób było w teatrze $0, 1, \ldots, 5$ razy. Z tej jednej tabelki czytamy średnią, dominantę i medianę, a w c) sumujemy liczności powyżej mediany.

a)

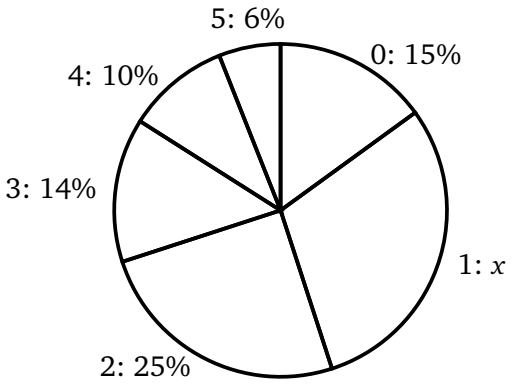
ZARYS

A tabelka liczności
→ liczby osób dla $0, 1, \ldots, 5$ wizyt

B średnia ważona
→ wynik a)

A **tabelka liczności** → liczby osób dla $0, 1, \ldots, 5$ wizyt

1 Brakujący procent dla jednej wizyty liczysz, odejmując pozostałe wycinki od całości.



razem: 400 osób, czyli 100%

$100\% - 15\% - 25\% - 14\% - 10\% - 6\% = 30\%$

2 Każdy procent mnożysz przez 400 i wpisujesz liczby osób do tabelki.

$0{,}15 \cdot 400 = 60$
$0{,}30 \cdot 400 = 120$
$0{,}25 \cdot 400 = 100$
$0{,}14 \cdot 400 = 56$
$0{,}10 \cdot 400 = 40$
$0{,}06 \cdot 400 = 24$

liczba wizyt	0	1	2	3	4	5
liczba osób	60	120	100	56	40	24

$60 + 120 + 100 + 56 + 40 + 24 = 400$

B **średnia ważona** → wynik a)

3 Średnią liczysz ze wzoru na średnią ważoną, wagami są liczby osób z tabelki.

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$\bar{s} = \frac{60 \cdot 0 + 120 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 56 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 24 \cdot 5}{400}$$

4 Liczysz iloczyny w liczniku, sumujesz je i dzielisz przez 400.

$$\bar{s} = \frac{0 + 120 + 200 + 168 + 160 + 120}{400} = \frac{768}{400}$$
$$\bar{s} = 1{,}92$$

WYNIK $\bar{s} = 1{,}92$

b)

1 Dominanta to liczba wizyt, którą podało najwięcej osób: 120 osób przy jednej wizycie.

$\text{Mo} = 1$

WYNIK $\text{Mo} = 1$

c)

ZARYS

C mediana z tabelki A → wartość mediany

D osoby powyżej mediany → wynik c)

C **mediana z tabelki A** → wartość mediany

1 Danych jest 400, czyli parzyście, więc mediana to średnia wyrazu 200. i 201.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{400}{2}} + a_{\frac{400}{2}+1}\right)$$
$$\text{Me} = \frac{1}{2}\left(a_{200} + a_{201}\right)$$

2 Dodajesz liczności po kolei z tabelki A, aż przekroczysz 201 osób.

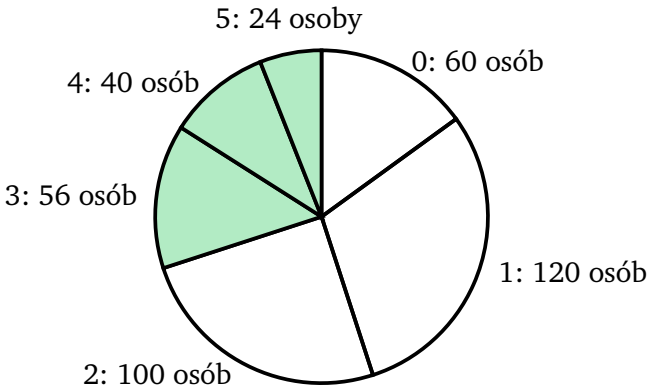
$60 + 120 = 180$
$180 + 100 = 280$

3 Osoby od 181. do 280. były w teatrze dwa razy, więc oba środkowe wyrazy to 2.

$$\text{Me} = \frac{1}{2}(2 + 2)$$
$$\text{Me} = 2$$

D **osoby powyżej mediany** → wynik c)

4 Fraza „więcej razy, niż wynosi mediana” bierze tylko 3, 4 i 5 wizyt; dodajesz te liczności.



zamalowane: więcej niż 2 wizyty

$$x > 2$$

$$56 + 40 + 24 = 120$$

WYNIK 120 osób